MA’RUZA

YUQORI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR. TARTIBINI PASAYTIRISH MUMKIN BO’LGAN BA’ZI BIR IKKINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

Mavzuning rejasi

1. Yuqori tartibli differensial tenglamalar.Umumiy tushunchalar va ta’riflar.
2. Tartibini pasaytirish mumkin bo’lgan ba’zi bir yuqori tartibli differensial tenglamalar.
3. Differensial tenglamada y oshkor ishtirok etmagan yuqori tartibli tenglamalar.
4. x oshkor ishtirok etmagan yuqori tartibli differensial tenglamalar.
5. Bir jinsli chiziqli tenglamalar. Asosiy tushunchalar va xossalar.

Tayanch so’z va iboralar: erkli o’zgaruvchi, n-tartibli oddiy differensial tenglama, yechim mavjudligi haqidagi teorema, yechim yagonaligi haqidagi teorema, sohada uzluksiz funksiya, xususiy integral, oshkor ishtirok etmagan, n-tartibli chiziqli differensial tenglama, bir jinsli chiziqli differensial tenglama, o’zaro chiziqli bog’liq, Voronskiy determinanti, Liuvill formulasi.

1.Yuqori tartibli differensial tenglamalar. Umumiy tushunchalar va ta’riflar

1-Ta’rif: Erkli o’zgaruvchi x, noma’lum funksiya $y = y(x)$ va uning hosilalari qatnashgan quyidagi ko’rinishdagi

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

yoki $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ tenglamaga n-tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi. Bu yerda asosiy masala (1) tenglamaning yechimini topishdir. Buning uchun (1) tenglamani yechimi mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremani keltiramiz va uni isboti ustida to’xtalmaymiz.

Teorema: Agar $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ tenglamada $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ funksiya va uning $y, y', ..., y^{(n-1)}$ argumentlari bo’yicha olingan xususiy $x = x_0, y = y_0, \quad y' = y'_0, ..., \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ hosilalari qiymatlarini o’z ichiga biror sohadagi uzluksiz funksiyalaridan iborat bo’lsa, bu holda tenglamaning

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, y'\big|_{x=x_0} = y_0, ..., y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \qquad (2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $y = y(x)$ yechimi mavjud va yagonadir. Teoremadagi (2) shartlar boshlang’ich shartlar deyiladi.

2-Ta’rif: Berilgan (1) tenglamani ayniyatga aylantiruvchi $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ funksiya n-tartibli differensial tenglama (1) ning umumiy yechimi deyiladi. Bu yerda $C_1, C_2, ..., C_n$ lar ixtiyoriy o’zgarmas sonlar bo’lib, ularning har qanday qiymatlarida tenglamani qanoatlantiradi. Agar (2) boshlang’ich shartlar bo’lsa, u holda $C_1, C_2, ..., C_n$ larni shunday tanlash mumkinki, yechim (2) shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimga ega bo’ladi. Shuningdek (1) tenglamani ayniyatga aylantiruvchi

$$\Phi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0$$

funksiya umumiy integral deyiladi va boshlang’ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechim xususiy integral deyiladi.

2.Tartibini pasaytirish mumkin bo’lgan ba’zi bir yuqori tartibli differensial tenglamalar

Yuqori tirtibli differensial tenglamaning eng sodda ko’rinishi

$$y^{(n)} = f(x) \qquad (3)$$

shaklda bo'ladi. Bu tenglama umumiy yechimini topish uchun uni x_0 va x oralig'ida integrallaymiz, u holda $y^{(x)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$ ekanligidan

$$y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x} f(x)dx+C_1 \tag{4}$$

ifodaga ega bo'lamiz, bunda C_1 integrallash o'zgarmasi. (4) ni bir marta integrallab

$$y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x)dx\right)dx+C_1\left(x-x_0\right)+C_2$$

integrallashni shunday davom ettirib, nihoyat (n-marta integrallashdan keyin) umumiy integralining

$$y=\int_{x_0}^{x}\ldots\int_{x_0}^{x} f(x)dx\ldots dx+\frac{C_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{C_2(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+C_n \tag{5}$$

ifodani hosil qilamiz. Oxirgi (5) ifoda (3) tenglamani umumiy yechimi bo'ladi. Agar (2) boshlang'ich shartlar berilgan bo'lsa, ularga mos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ larni aniqlab differensial tenglamani xususiy yechimini topamiz.

1-misol: $y'''=\dfrac{2}{x}$ tenglamani $y\big|_{x_0=1}=1,\ y'\big|_{x_0=1}=1,\ y''\big|_{x_0=1}=3$ni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi topilsin.

Yechish: Berilgan tenglamani ketma-ket uch marta integrallaymiz, u holda

$$y''=\int_{x_0}^{x}\frac{2}{x}dx+C_1=2\ln|x|\Big|_1^x+C_1=2\ln x+C_1,\ \ y'=2\int_1^x(\ln x+C_1)dx+C_2=2\int_1^x \ln x dx+C_1(x-1)+C_2=$$

$$=\begin{vmatrix} u=\ln x, & dv=dx \\ du=\dfrac{dx}{x}, & v=x \end{vmatrix}=2\left(x\ln x\Big|_1^x-\int_1^x dx\right)+C_1(x-1)+C_2=2x\ln x-x+1+C_1(x-1)+C_2.$$

$$y=\int_1^x(2x\ln x-x+1)dx+\frac{C(x-1)^2}{2}+C_2(x-1)+C_3=$$

$$2\int_1^x x\ln x dx-\frac{x^2}{2}+x+\frac{C_1(x-1)^2}{2}+C_2(x-1)+C_3=$$

$$=\begin{vmatrix} u=\ln x, & dv=xdx \\ du=\dfrac{dx}{x}, & v=\dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix}=2\left(\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^x-\frac{1}{2}\int_1^x xdx\right)-\frac{x^2}{2}+x+\frac{C_1(x-1)}{2}+C_2(x-1)+C_3=$$

$$=x^2\ln x-\frac{3}{2}x^2+x+\frac{C_1(x-1)^2}{2}+C_2(x-1)+C_3.$$

Endi boshlang'ich shartlardan foydalanamiz $y''=2\ln x+C_1;\ y''\big|_{x_0}=3$ dan $3=2\ln x+C_1,\ C_1=3$.

$y'=2x\ln x-x+1+C_1(x-1)+C_2;\ \ y'\big|_{x_0}=1$ dan $1=2\cdot1\cdot\ln1-1+1+C_1(1-1)+C_2$,

bundan $C_2=1$. $y=x^2\ln x-\dfrac{3}{2}x^2+x+\dfrac{C_1(x-1)^2}{2}+(x-1)+C_3,\ \ y\big|_{x_0=1}=1$ dan $C_3=\dfrac{3}{2}$.

Demak xususiy yechim

$$y=x^2\ln x-\frac{3}{2}x^2+x+\frac{3}{2}(x-1)^2+(x-1)+\frac{3}{2}=x^2\ln x-x+2.$$

3.Differensial tenglamada y oshkor ishtirok etmagan yuqori tartibli tenglamalar

Agar differensial tenglamada y oshkor ishtirok etmasin, ya'ni

$$y'' = f(x, y') \tag{6}$$

bo'lsin. Uni yechish uchun $y' = p(x)$ belgilash kiritamiz, u holda (6) tenglamani $p' = f(x, p)$ shaklda yozamiz. Bu esa p parametrga nisbatan birinchi tartibli tenglama bo'ladi. Demak, $\frac{dp}{dx} = f(x, p)$ tenglamani integralini hisoblab $p = p(x, C)$ yechimni topamiz. $y' = p$ ekanligini hisobga olib, $y = \int p(x, C_1)dx + C_2$ umumiy yechimni topamiz.

2-misol: $xy'' - y' = x^2e^x$ differensial tenglamaning $y|_{x=0} = -1,\ y'|_{x=0} = 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi topilsin.

Yechish: $y' = p,\ y'' = p'$ bo'lsa, u holda $p' - \frac{1}{x}p = xe^x$ chiziqli tenglamani hosil qilamiz, uni $p = uv,\quad p' = u'v + uv' \Rightarrow \quad u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = xe^x \quad u'v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) = xe^x$ shaklda keltirib,

$v' - \frac{1}{x}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} - \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln v - \ln x = \ln C,\ y = Cx,\ C = 1 \Rightarrow y = x$,

$u'x = xe^x \Rightarrow u' = e^x \Rightarrow u = e^x + C_1,\ y = \int xe^x dx + C_1x^2 + C_2$ umumiy yechimni topamiz.

Boshlang'ich shartlarga asosan $0 = 0 + C_1 \cdot 0$, $C_1 = 0$; $-1 = e^0(0-1) + C_2$, $C_2 = 0$ ekanligidan xususiy yechim $y = (x-1)e^x$ ko'rinishda bo'ladi.

4. x oshkor ishtirok etmagan yuqori tartibli differensial tenglamalar

Ushbu ko'rinishdagi $y'' = f(x, y')$ (7) differensial tenglamada x argument oshklo bo'lmagan hol. Bu tenglamani yechimini topish uchun avvalgidek $y' = p(y)$ almashtirib olamiz, lekin p ni x ning emas y ni funksiyasi deb qaraymiz, u holda $y' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$ bo'lganligidek tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi. $p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$ va uni integrallab $p = p(y, C)$ ni topamiz. Bundan $\frac{dy}{dx} = p(y, C_1)$ yoki $\frac{dy}{p(y, C_1)} = dx$ ekanligi kelib chiqadi. Uni yana bir marta integrallab (7) tenglamani umumiy integrali $\hat{O}(x, y, C_1, C_2) = 0$ ni topamiz.

3-misol: $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$ tenglamani $y|_{x=0} = 1,\ y'|_{x=0} = 1$ shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish: $y' = p,\ y'' = p\frac{dp}{dy}$ dan $yp\frac{dp}{dy} - p^2 + p^3 = 0 \Rightarrow p\left(y\frac{dp}{dy} - p + p^2\right) = 0 \Rightarrow$

$$p = o,\ y' = 0,\ y = C,\ y\frac{dp}{dy} - p + p^2 = 0 \Rightarrow y\frac{dp}{dy} = p - p^2 \Rightarrow \frac{dp}{p^2 - p} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{p-1} - \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|p-1| - \ln|p| = -\ln y + \ln C_1 \Rightarrow \frac{p-1}{p} = \frac{C_1}{y} \Rightarrow p\left(1 + \frac{C_1}{y}\right) = 1 \Rightarrow$$

$\left(1+\frac{C_1}{y}\right)dy = dx \Rightarrow \quad y + C_1 \ln y = x + C_2$ umumiy integrali bo'ladi. Boshlang'ich shartlarga asosan yozamiz $1 + C_1 \ln 1 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1, \quad 1 \cdot (1 + C_1) = 1 \Rightarrow C_1 = 0$. Demak xususiy yechim $y = x + 1$ bo'ladi.

5.Bir jinsli chiziqli tenglamalar. Asosiy tushunchalar va xossalar

1-ta'rif: Noma'lum y funksiya va uning $y', y'', ..., y^{(n)}$ hosilalariga nisbatan birinchi darajali bo'lgan

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x) \tag{8}$$

differensial tenglamaga n-tartibli chiziqli tenglama deyiladi.

Bu yerda $a_0, a_1, ..., a_n$, $f(x)$ lar x ning funksiyasi yoki o'zgarmas sonlardir. $f(x)$ funksiya (8) tenglamaning o'ng tomoni deyiladi. Agar $f(x) \neq 0$ bo'lsa, (8) tenglamani bir jinsli bo'lmagan, agar $f(x) = 0$ bo'lsa,

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0 \tag{9}$$

tenglamaga bir jinsli chiziqli differensial tenglama deyiladi. Bu yerda $a_0 \neq 0$, shuning uchun hamma vaqt $a_0 \neq 0$, deb olish mumkin, umumiy qonuniyatga zid bo'lmagan holda. Avval, bir jinsli chiziqli differensial tenglamani ba'zi xossalarini ko'rib chiqamiz. Soddalik uchun bu xossalarni ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglama uchun keltiramiz.

1-xossa: Agar y_1 va y_2 lar 2-tartibli bir jinsli chiziqli

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{10}$$

tenglamaning ikkita xususiy yechimi bo'lsa, u holda $y_1 + y_2$ ham tenglamaning yechimi bo'ladi. Haqiqatan, y_1 va y_2 dar (10)ni yechimi, ya'ni $y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0, \qquad y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0$ bo'lganidan $(y_1 + y_2)'' + a_1 (y_1 + y_2)' + a_2 (y_1 + y_2) = \; = (y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + (y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

2-xossa: Agar y_1 (10) tenglamaning yechimi bo'lsa, u holda $y = C y_1$ ham shu tenglamani yechimi bo'ladi. Bu yerda $C = const$. Haqiqatan ham, xuddi yuqoridagi kabi yozamiz: $(Cy_1)'' + a_1 (Cy_1)' + a_2 (Cy_1) = C(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) = C \cdot 0 = 0$ bo'lsa.

2-ta'rif: Agar y_1 va y_2 yechimlar biror $[a,b]$ kesmada bo'lsa, u holda yechimlar o'zaro chiziqli bog'liq deyiladi, aks holda , ya'ni $y_1 \neq \lambda y_2$ bo'lsa, o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlar deyiladi. Bu yerda $\lambda = const$.

Masalan, $y'' - y = 0$ tenglamaning yechimlari $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = 3e^x$ bo'lsin. Bu yerda y_1, y_2 lar chiziqli bog'liq emas, y_1, y_3 chiziqli bog'liq yechimlardir.

3-ta'rif: Agar $y_1(x), y_2(x)$ va ularning hosilalari $y_1'(x), y_2'(x)$ lar berilgan bo'lsa, u holda $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$ determinant- Voronskiy determinanti, deyiladi.

3-xossa: Agar biror $[a,b]$ kesmada y_1, y_2 chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda Voronskiy determinanti shu kesmada aynan nolga teng bo'ladi. Haqiqatan ham, $y_2 = \lambda y_1$ bo'lgani uchun $y_2' = \lambda y_1'$ va determinantning xossasiga asosan $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = 0$ bo'ladi.

4-xossa: Agar $[a,b]$ kesmada berilgan y_1, y_2 lar (10) tenglamaning yechimlari bo'lsa, kesmaning biror nuqtasida Voronskiy determinanti nolga teng bo'lmasa, u holda determinant hyech bir nuqtasida nolga aylanmaydi.

Isbot: y_1, y_2 lar (10) tenglamani yechimlari bo'lgani uchun $\begin{cases} y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0 \\ y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0 \end{cases}$ bo'ladi. Birinchi tenglikni y_1 ga, ikkinchisini y_2 ga ko'paytirib, ayirsak $(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) + a_1(y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0$. Bundan $W' + a_1 W = 0$ (11) ko'rinishda yozib, $W_x'(y_1, y_2) = (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$ bo'ladi va $W\big|_{x=x_0} = W_0$ boshlang'ich shart asosida (11) tenglamani yechimini topamiz. $\dfrac{dW}{W} = -a_1 dx$ integrallab $\ln W = -\int\limits_{x_0}^{x} a_1 dx + \ln C$ yoki $W = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1 dx}$ (12)ni topamiz. (12) formula Liuvill formulasi deyiladi. Boshlang'ich shartga asosan $W_0 = C_1 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1 dx} = C$ ekanligidan, W_0 esa $x = x_0$ nuqtada nolga teng emas, bundan $W = W_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1 dx}$ ham nolga teng emasligi kelib chiqadi. Shunday qilib, agar (10) tenglamaning yechimlari kesmada chiziqli bog'liq bo'lmasa, bu yechimlardan tuzilgan Voronskiy determinanti kesmaning hyech bir nuqtasida nolga aylanmaydi.

5-xossa: Agar y_1, y_2 lar (10) tenglamaning chiziqli bog'liq yechimlari bo'lsa, u holda

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{13}$$

(10) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Isbot: Yuqoridagi 1-2 xossalarga asosan $C_1 y_1 + C_2 y_2$ tenglamaning yechimi ekanligi kelib chiqadi. $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$ boshlang'ich shartlar berilgan bo'lsa, uni (13) ga qo'yib,

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_{10} + C_2 y_{20} \\ y_0' = C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' \end{cases} \tag{14}$$

sistemani hosil qilamiz. Bu yerda $y_1\big|_{x=x_0} = y_{10}$, $y_2\big|_{x=x_0} = y_{20}$, $y_1'\big|_{x=x_0} = y_{10}'$, $y_2'\big|_{x=x_0} = y_{20}'$ (14) sistemasining asosiy determinanti Voronskiy determinanti bo'lib, u nolga teng emas

$W = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} = y_{10} y_{20}' - y_{10}' y_{20}$, chunki, y_1, y_2 lar chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlar. Bu sistemadan berilgan boshlang'ich shartlarda C_1, C_2 larni aniqlash mumkin bo'ladi, natijada tenglamaning xususiy yechimini topamiz. (13) yechim esa tenglamaning umumiy yechimini, ya'ni yechimlar oilasini tashkil qiladi. Yuqorida keltirilgan xossalar ikkinchi tartibli chiziqli tenglamalar uchun keltirildi. Tenglamalar tartibi n-darajali bo'lganda ham yuqoridagi xossalar o'z kuchini saqlaydi.